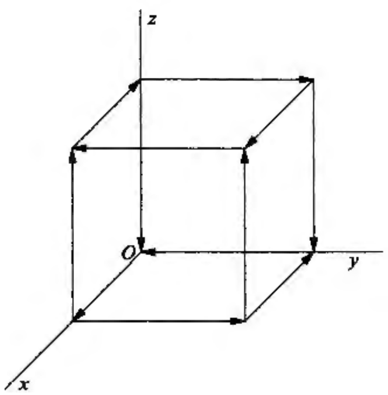
Capítulo 1

Cálculo Vectorial

Resolución del Problema 1.1

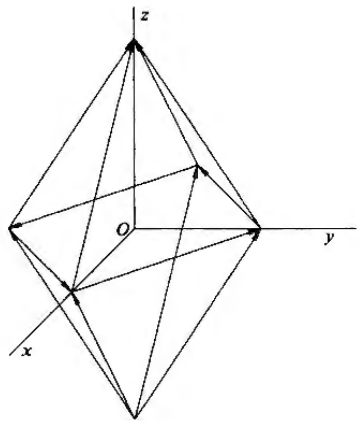
Nótese que los vectores de la base inferior del cubo están formados por dos pares de vectores paralelos y opuestos, y por lo tanto únicamente general un par. Lo mismo sucede con los cuatro vectores de la base superior del cubo, que en este caso generan un par del mismo módulo pero dirección opuesta al generado por los vectores de la base inferior, y por lo tanto se cancelan; así pues, el conjunto de los vectores contenidos en las bases inferior y superior del cubo forman un sistema nulo, y proporcionan por lo tanto un par nulo y una resultante nula.



Queda aún analizar el efecto de los vectores restantes, los cuales forman un sistema de vectores con dirección vertical. De estos, hay tantos vectores con sentido ascendente como con sentido descendente, por lo que generan una resultante nula también. Sin embargo, mientras que los dos vectores de la cara frontal son ascendentes, los dos vectores de la cara trasera son descendentes, por lo que genera un par no nulo. Es fácil ver que este par tiene módulo 2, su dirección es paralela al eje Oy, y su sentido es opuesto al de los valores crecientes de y.

Resolución del Problema 1.2

El eje central es la recta vertical que contiene los vértices superior e inferior del octoedro, y coincide por lo tanto con el eje Oz. Nótese que en este caso, el eje central se puede obtener sin la necesidad de realizar cálculo alguno.



En efecto, el sistema de vectores se puede subdividir en los siguientes tres sistemas:

S_1: formado por los cuatro vectores de la base del octaedro, contenidos en el plano Oxy. Al tratarse de un octoedro regular, los cuatro vectores tienen el mismo módulo, y forman dos pares de vectores (esto es, dos a dos, tienen la misma dirección y sentidos opuestos). Por lo tanto, el conjunto tiene una resultante nula y únicamente generan un par $\mathbf{M}$ (el mismo en todos lo puntos del espacio) cuaya dirección es vertical y positiva en el sentido del eje Oz.

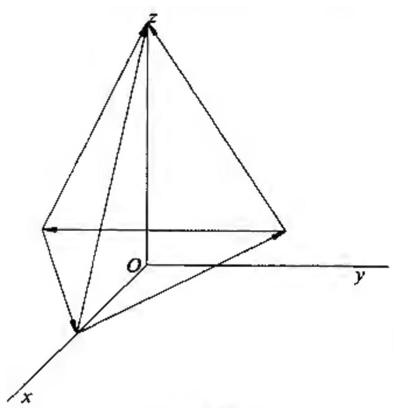
S_2: formado por los cuatro vectores concurrentes en el vértice superior del octoedro. Al ser un sistema de vectores concurrentes, generan un momento nulo en el vértice superior, y una resultante $\mathbf{R}$ no nula que es fácil ver que tiene dirección vertical ascendente. Este sistema es por lo tanto equivalente a un vector equipolente a $\mathbf{R}$ con una recta de acción colineal con el eje Oz. En efecto, por la estructura bidimensional del campo de momentos, el sistema genera el mismo momento (en este caso nulo) en cualquier punto contenido en el eje Oz, al ser éste paralelo a la resultante $\mathbf{R}$, y el sistema puede reducirse de la misma manera a cualquier punto del eje Oz.

S_3: formado por los cuatro vectores concurrentes en el vértice inferior del octoedro. A todos los efectos, es un sistema análogo a S_2, que genera un momento nulo en el vértice inferior, y una resultante $\mathbf{R}$ no nula en dirección vertical ascendente. Este sistema es por lo tanto equivalente a un vector equipolente a $\mathbf{R}$ y con una recta de acción colineal con el eje Oz.

Como cada uno de los sistemas S_2 y S_3 se pueden reducir a un vector equipolente a $\mathbf{R}$ con el eje Oz como su recta de acción, la unión de sendos sistemas es por lo tanto equivalente a un único vector, equipolente a $2\mathbf{R}$, y con una recta de acción colineal con el eje Oz. Por lo tanto, para este sistema el eje Oz resulta ser su eje central, y el momento central es nulo, ya que estos sistemas generan un momento nulo sobre los puntos del eje Oz. Como el sistema S_1 tiene resultante nula y únicamente genera un par $\mathbf{M}$, el mismo en todos los puntos del espacio, es inmediato deducir que el sistema completo de vectores (esto es, $S_1 \cup S_2 \cup S_3$) tiene como eje central la recta Oz, y su momento central coincide con el par $\mathbf{M}$ generado por los vectores S_1 contenidos en el plano Oxy.

Resolución del Problema 1.4

El eje central del sistema es colineal con el eje Oz, y contine por lo tanto el vértice superior del tetraedro. Una vez más, uno puede llegar a esta conclusión únicamente mediante la observación de la geometría del sistema, y la aplicación de las propiedades de sistemas de vectores deslizantes.



El sistema de vectores se puede subdividir en los siguientes dos sistemas:

S_1: formado por los tres vectores de la base inferior del tetraedro, contenidos en el plano Oxy. Al tratarse de un tetraedro regular, los tres vectores tienen el mismo módulo, y es fácil ver que únicamente generan un par, ya que su resultante es nula; en efecto, cuando se sumarn los tres vectores, estos completan un circuito cerrado, y así su vector suma (la resultante) es un vector cuyo extremo es el mismo que su origen, esto es, un vector nulo. Por lo tanto, el conjunto tiene una resultante nula y únicamente generan un par $\mathbf{M}$ (el mismo en todos lo puntos del espacio) cuaya dirección es vertical y positiva en el sentido ascendente del eje Oz.

S_2: formado por los tres vectores concurrentes en el vértice superior del tetraedro. Al ser un sistema de vectores concurrentes, generan un momento nulo en el vértice superior, y una resultante $\mathbf{R}$ no nula que es inmediato ver que tiene dirección vertical ascendente. Este sistema es por lo tanto equivalente a un vector equipolente a $\mathbf{R}$ con una recta de acción colineal con el eje Oz. En efecto, por la estructura bidimensional del campo de momentos, el sistema genera el mismo momento (en este caso nulo) en cualquier punto contenido en el eje Oz, al ser éste paralelo a la resultante $\mathbf{R}$, y el sistema puede reducirse de la misma manera a cualquier punto del eje Oz.

Así pues, el sistema completo de vectores deslizantes (esto es, $S_1 \cup S_2$) tiene como eje central la recta Oz, y puede reducirse a un sistema equivalente de un único vector $\mathbf{R}$ con recta de accion colineal con Oz, más un par $\mathbf{M}$, de dirección también paralelo al eje Oz, y sentido concidente con el de los valores crecientes de z.

La obtención de los invariantes del sistema sí requiere la realización de cálculos. En particular, como el tetraedro es regular, se sabe que cada una de sus caras forma un triángulo equilátero de arista a. Así, es sencillo calcular el par $\mathbf{M}$ mediante el cálculo de los momentos que los vectores del sistema S_1 generan sobre un vértice cualquiera de la base del tetraedro, donde dos de los vectores son conconcurrentes y de este modo únicamente uno de los tres vectores genera par. Se llega así al resultado siguiente:

$$\mathbf{M} = \frac{\sqrt{3}}{2}\, a\, \mathbf{k}$$

y por lo tanto, la invariante escalar del sistema coincide con el módulo del par $\mathbf{M}$, ya que $\mathbf{M} \parallel \mathbf{R}$. Por su parte, el cálculo del invariante vectorial, esto es, la resultante del sistema, se puede obtener mediante simples nociones de geometría:

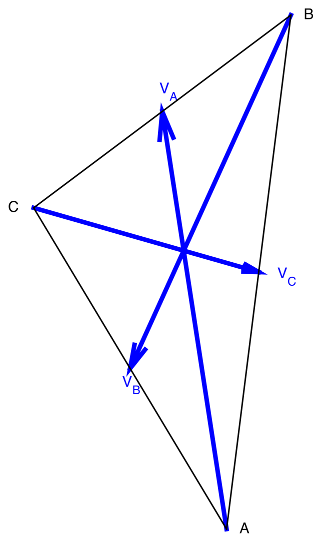
$$\mathbf{R} = \sqrt{6}\, a\, \mathbf{k}.$$

Resolución del Problema 1.5

El sistema de vectores deslizantes considerado es el mostrado en la siguiente figura.

Nótese que las rectas soporte de los vectores se cortan en el centroide del triángulo, esto es, en el punto de intersección de las medianas del triángulo (líneas que pasan por los vértices y los puntos medios de los lados opuestos). Por lo tanto, el momento que el sistema de vectores genera en el centroide del triángulo es nulo.

Cada uno de los tres vectores del sistema se puede expresar como combinación de los vectores que pasan



por los vértices, esto es:

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{AB} + \frac{\mathbf{BC}}{2}$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{BC} + \frac{\mathbf{CA}}{2}$$
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{CA} + \frac{\mathbf{AB}}{2}$$

Por lo tanto, la resultante del sistema resulta ser nula, ya que la suma de los vectores resulta ser proporcional a un vector con con origen y extremo en el mismo punto:

$$\mathbf{R} = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_C = \frac{3}{2}\left(\mathbf{AB} + \mathbf{BC} + \mathbf{BC}\right) = \mathbf{0}.$$

Así pues, a través de la ecuación de cambio de momentos resulta sencillo ver un sistema de resultante nula genera el mismo momento en todos los puntos de espacio. Además, como hemos visto que el momento en el centroide del triángulo es nulo, consecuentemente el momento también será nulo en el punto A, así como el cualquier otro punto del espacio. En resumen, el sistema de vectores es equivalente un *sistema nulo*.

Resolución del Problema 1.8

a) Si un sistema de vectores tiene el mismo momento respecto a tres puntos del espacio, puede haber dos causas para ello. El caso trivial es aquel en el que los tres puntos se encuentren alineados en una misma recta paralela a la resultante del sistema; sabemos que los infinitos puntos pertenecientes a dicha recta tienen el mismo momento, debido a la estructura bidimensional del campo de momentos. En este caso la solucion no es tan simple, ya que los tres puntos no están alineados, sino que cada uno se encuentra en el vértice de un triángulo. Por lo tanto, la única causa que permite que los tres puntos tengan el mismo momento, es que la resultante del sistema sea nula; en efecto, ésto permite que no solo esos tres puntos, sino todos los puntos del espacio tengan el mismo momento. Por lo tanto, el sistema descrito se reduciría a un *sistema de resultante nula*.

b) Si se anula el momento de un sistema de vectores respecto a cada uno de los lados de un triángulo, entonces no solo exigimos la condición del punto anterior (esto es, que el momento sea el mismo en los tres puntos), sino que además imponemos que el momento sea nulo. Por lo tanto, estaríamos ante un sistema de de resultante nula y momento nulo, también referido como un *sistema nulo*.

Resolución del Problema 1.10

El resultado de esta expresión vectorial es el vector nulo. En efecto, si se desarrolla cada término de la expresión:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} \\
\mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{b} \\
\mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) &= (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\,\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\,\mathbf{a}
\end{aligned}$$

y se suman, es inmediato ver que los términos se cancelan mutuamente. Esta expresión es también conocida como la identidad de Jacobi.